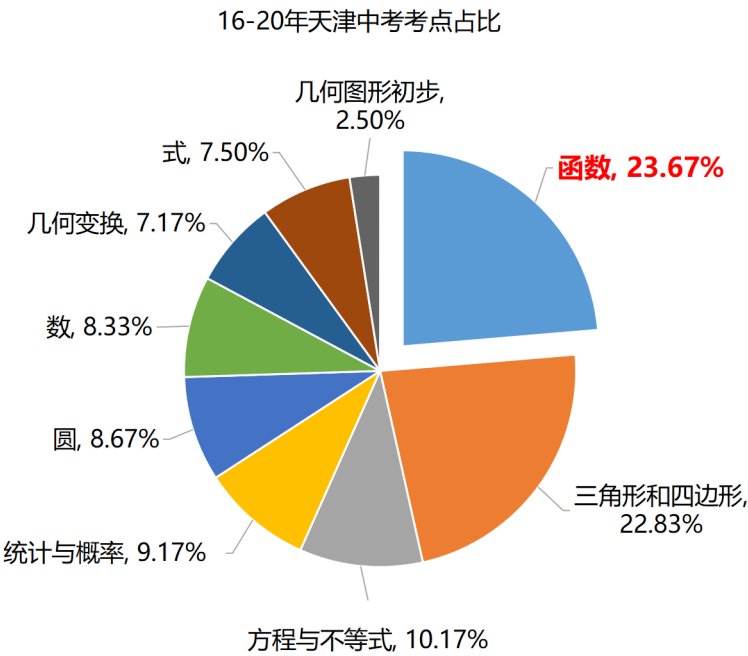


第1讲二次函数与方程、不等式综合

《二次函数提高》是二次函数基础的后续模块，在中考12题，25题均有涉及，难度偏高，题目的综合性较强，与一次函数的结合较大，需要学生有一定的知识储备，构建一定的知识体系，以便后续内容的学习。

本模块侧重于二次函数的综合练习，难度偏高，适用于一轮复习，二次函数模块的短期突破。本模块分为二次函数与方程、不等式综合、二次函数交点问题、二次函数与区间最值 3 讲内容，配套练习进一步巩固所学内容，专项练习，巩固易错点。

知己知彼

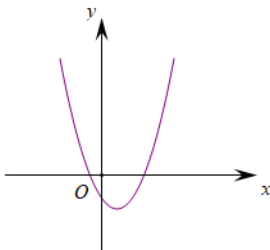
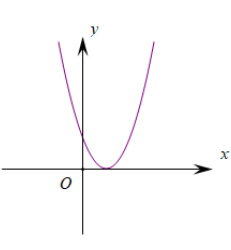
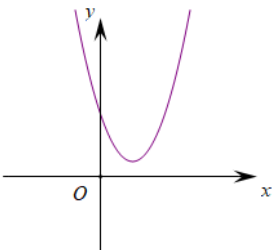


年份	分值	占比	题号
2021年	13	11%	12、25
2020年	13	11%	12、25
2019年	13	11%	12、25
2018年	13	11%	12、25
2017年	13	11%	12、25

一、二次函数与方程

1. $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴的交点

方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的解可以看做函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴交点的横坐标，交点的个数决定方程解的个数。

			
与 x 轴交点个数	2	1	没有
判别式	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
根的情况	有两个不等实根 $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$	有两个相等实根 $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	没有实数根

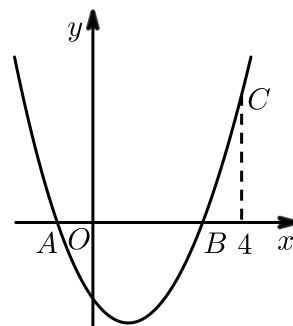
典题精练

- 已知二次函数 $y = (x - a - 1)(x - a + 1) - 2a + 9$ (a 是常数) 的图象与 x 轴没有公共点，且当 $x < -2$ 时， y 随 x 的增大而减小，则实数 a 的取值范围是 () .
 A. $a > -2$ B. $a < 4$ C. $-2 \leq a < 4$ D. $-2 < a \leq 4$
- 若关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + 2x - 5 = 0$ 的两个根中有且仅有一个根在 0 和 1 之间 (不含 0 和 1)，则 a 的取值范围是 () .
 A. $a > -3$ B. $a > 3$ C. $a < -3$ D. $a < 3$

3. 如图，二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象经过点 $A(-1, 0)$ ，点 $B(3, 0)$ ，点 $C(4, y_1)$ ，点 $D(x_2, y_2)$ 是抛物线上任意一点，有下列结论：

- ①二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的最小值为 $-4a$ ；
- ②若 $-1 \leq x_2 \leq 4$ ，则 $-4a \leq y_2 \leq 5a$ ；
- ③若 $x_2 > 4$ ，则 $y_2 > y_1$ ；
- ④一元二次方程 $cx^2 + bx + a = 0$ 的两个根为1和 $-\frac{1}{3}$ 。

其中正确结论个数是（ ）。



- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

2. $y = ax^2 + bx + c$ 与直线 $y = h$ 的交点

方程 $ax^2 + bx + c - h = 0$ 的解可以看做函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与直线 $y = h$ 交点的横坐标，交点的个数决定方程解的个数。

$ax^2 + bx + c - h = 0$ 的判别式 Δ	图象 (以 $a > 0$ 为例)	与直线 $y = h$ 的交点情况	一元二次方程根的情况
$\Delta > 0$		有两个交点	有两个不相等的实数根
$\Delta = 0$		有一个交点	有两个相等的实数根
$\Delta < 0$		无交点	无实数根

 典题精练

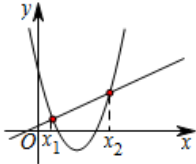
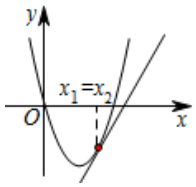
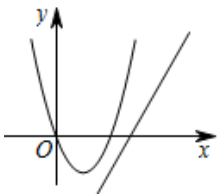
4. 将二次函数 $y = x^2 - 4x + a$ 的图象向左平移1个单位长度, 再向上平移1个单位长度, 若得到的函数图象与直线 $y = 2$ 有两个交点, 则 a 的取值范围是 ().
- A. $a < 3$ B. $a > 3$ C. $a < 5$ D. $a > 5$
5. 已知抛物线 $y = x^2 + bx + 1$ 的对称轴是 $x = 1$, 且 $x^2 + bx + 1 - m = 0$ (m 为实数) 在 $0 < x < 3$ 范围内有实数根, 则 m 的取值范围是 ().
- A. $0 \leq m < 1$ B. $0 < m \leq 3$ C. $1 \leq m \leq 3$ D. $0 \leq m < 4$
6. 已知关于 x 的一元二次方程 $(x - 2)(x - 3) = m$ 有两个不相等的实数根 x_1, x_2 有下列结论: ① $x_1 = 2, x_2 = 3$; ② $m > -\frac{1}{4}$; ③ 二次函数 $y = (x - x_1)(x - x_2) + m$ 的图象与 x 轴交点的横坐标分别为 a 和 b , 则 $a + b = 5$. 其中, 正确结论的个数是 ().
- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

 过关斩将

7. 已知抛物线 $y = (x + a)(x - a - 1)$ (a 为常数, $a \neq 0$). 下列结论:
- ① 抛物线的对称轴为 $x = \frac{1}{2}$;
- ② 方程 $(x + a)(x - a - 1) = 1$ 有两个不相等的实数根;
- ③ 抛物线上有两点 $P(x_0, m), Q(1, n)$, 若 $m < n$, 则 $0 < x_0 < 1$.
- 其中, 正确结论的个数为 ().
- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
8. 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 为常数, $a < 0$) 经过点 $(0, 2)$, 且关于直线 $x = -1$ 对称, $(x_1, 0)$ 是抛物线与 x 轴的一个交点. 有下列结论:
- ① 方程 $ax^2 + bx + c = 2$ 的一个根是 $x = -2$;
- ② 若 $1 < x_1 < 2$, 则 $-\frac{2}{3} < a < -\frac{1}{4}$;
- ③ 若 $m = 4$ 时, 方程 $ax^2 + bx + c = m$ 有两个相等的实数根, 则 $a = -2$;
- ④ 若 $-\frac{3}{2} \leq x \leq 0$ 时, $2 \leq y \leq 3$, 则 $a = -1$.
- 其中正确结论的个数是 ().
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

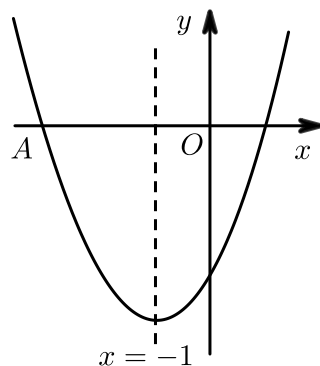
3. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 与一次函数 $y = mx + n$ 的交点

方程 $ax^2 + (b - m)x + (c - n) = 0$ 的解即是二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 与一次函数 $y = mx + n$ 的交点交点的横坐标值，交点的个数决定方程解的个数。

$ax^2 + (b - m)x + (c - n) = 0$ 的判别式 Δ	图象 (以 $a > 0$ 为例)	与直线 $y = mx + n$ 的交点情况	一元二次方程根的情况
$\Delta > 0$		有两个交点	有两个不相等的实数根
$\Delta = 0$		有一个交点	有两个相等的实数根
$\Delta < 0$		无交点	无实数根

典题精练

9. 如图，二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象经过点 $A(-3, 0)$ ，其对称轴为直线 $x = -1$ ，有下列结论：① $abc < 0$ ；② $a - b - 2c > 0$ ；③关于 x 的方程 $ax^2 + (b - m)x + c = m$ 有两个不相等的实数根；④若 $P(-5, y_1)$ ， $Q(m, y_2)$ 是抛物线上两点，且 $y_1 > y_2$ ，则实数 m 的取值范围是 $-5 < m < 3$ 。其中正确结论的个数是（ ）。



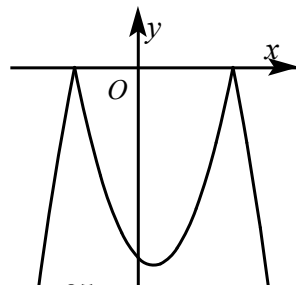
A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

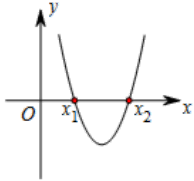
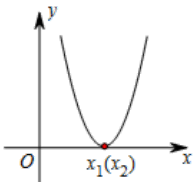
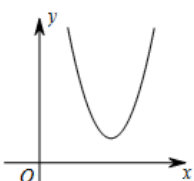
10. 已知二次函数 $y = -x^2 + x + 6$ 及一次函数 $y = 2x - m$ ，将该二次函数在 x 轴上方的图象沿 x 轴翻折到 x 轴下方，图象的其余部分不变，得到一个新函数的图象（如图所示），当直线 $y = 2x - m$ 与新函数图象有4个交点时， m 的取值范围是（ ）。



- A. $-4 < m < 6$ B. $-\frac{25}{4} < m < -4$ C. $6 < m < \frac{33}{4}$ D. $-\frac{25}{4} < m < 6$
11. 在平面直角坐标系内，抛物线 $y = ax^2 - x + 1 (a \neq 0)$ 与线段 AB 有两个不同的交点，其中点 $A(-1, 0)$ ，点 $B(1, 1)$ 。有下列结论：
- ①直线 AB 的解析式为 $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ ；②方程 $ax^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = 0$ 两个不相等的实数根；③ a 的取值范围是 $a \leq -2$ 或 $1 \leq a < \frac{9}{8}$ 。
- 其中，正确结论的个数为（ ）。
- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
12. 对于一个函数，当自变量 x 取 a 时，其函数值 y 也等于 a ，我们称 a 为这个函数的不动点。若二次函数 $y = x^2 + 2x + c$ （ c 为常数）有两个不相等且都小于1的不动点，则 c 的取值范围是（ ）。
- A. $c < -3$ B. $-3 < c < -2$ C. $-2 < c < \frac{1}{4}$ D. $c > \frac{1}{4}$

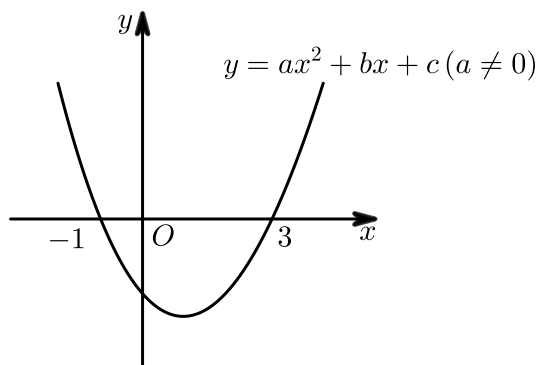
二、二次函数与不等式

1. 二次函数与一元二次不等式的关系

图象	与 x 轴的交点情况	$ax^2 + bx + c > 0$ 的解集	$ax^2 + bx + c < 0$ 的解集
	有两个交点	$x < x_1$ 或 $x > x_2$	$x_1 < x < x_2$
	有一个交点	$x \neq x_1$ (或 $x \neq x_2$)	无解
	无交点	全体实数	无解

典题精练

13. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图象如图所示，下列说法：① $2a + b = 0$. ② 当 $-1 \leq x \leq 3$ 时， $y < 0$. ③ $3a + c = 0$. ④ 若 $(x_1, y_1)(x_2, y_2)$ 在函数图象上，当 $0 < x_1 < x_2$ 时， $y_1 < y_2$ ，其中正确的是 () .



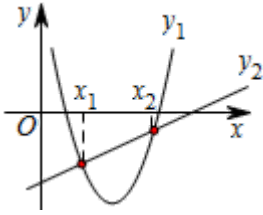
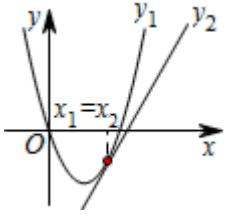
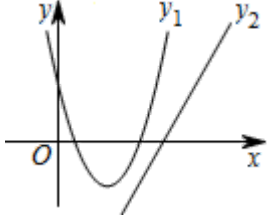
A. ①②④

B. ①③

C. ①②③

D. ①③④

2. 二次函数与一次函数的不等式关系

图象	两个函数的交点情况	$y_1 > y_2$ 的解集	$y_1 < y_2$ 的解集
	有两个交点	$x < x_1$ 或 $x > x_2$	$x_1 < x < x_2$
	有一个交点	$x \neq x_1$ (或 $x \neq x_2$)	无解
	无交点	全体实数	无解

典题精练

14. 已知二次函数 $y_1 = mx^2 + 4mx - 5m (m \neq 0)$ ，一次函数 $y_2 = 2x - 2$ ，有下列结论：

- ① 当 $x > -2$ 时， y_1 随 x 的增大而减小；
- ② 二次函数 $y_1 = mx^2 + 4mx - 5m (m \neq 0)$ 的图象与 x 轴交点的坐标为 $(-5, 0)$ 和 $(1, 0)$ ；
- ③ 当 $m = 1$ 时， $y_1 \leq y_2$ ；
- ④ 在实数范围内，对于 x 的同一个值，这两个函数所对应的函数值 $y_2 \leq y_1$ 均成立，则 $m = \frac{1}{3}$ 。

其中，正确结论的个数是 ()。

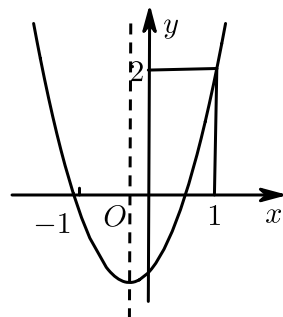
- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

3. 单字母取值

典题精练

15. 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象如图所示，则下列结论：

① $abc > 0$ ；② $a + b + c = 2$ ；③ $a < \frac{1}{2}$ ；④ $b > 1$ ．其中正确的结论是（ ）．



A. ①②

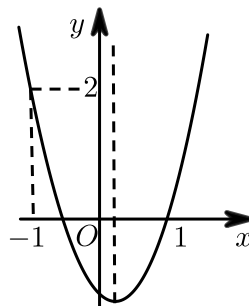
B. ②③

C. ③④

D. ②④

16. 如图，二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象开口向上，图象经过点 $(-1, 2)$ 和 $(1, 0)$ ，且与 y 轴相交于负半轴，下列结论：① $2a + b > 0$ ；② 方程 $ax^2 + bx + c - 3 = 0$ 的两根一个大于 1，另一个小于 -1；

③ $b = -1$ ；④ $a > 1$ ．其中正确结论的个数是（ ）．



A. 1个

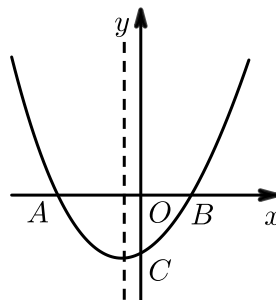
B. 2个

C. 3个

D. 4个

17. 如图抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 交 x 轴于 $A(-2, 0)$ 和点 B ，交 y 轴负半轴于点 C ，且 $OB = OC$ ．有下列结论：

① $2b - c = 2$ ；② $a = \frac{1}{2}$ ；③ $\frac{a+b}{c} > 0$ ．其中，正确结论个数是（ ）．



A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

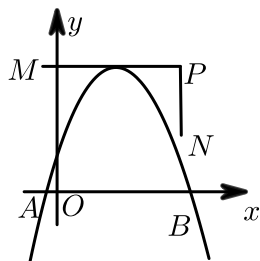
经典再现

18. 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 是常数 $a \neq 0, c > 1$) 经过点 $(2, 0)$, 其对称轴是直线 $x = \frac{1}{2}$, 有下列结论: ① $abc > 0$; ② 关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = a$ 有两个不等的实数根; ③ $a < -\frac{1}{2}$. 其中, 正确结论的个数是 ().
- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

4. 代数式取值范围

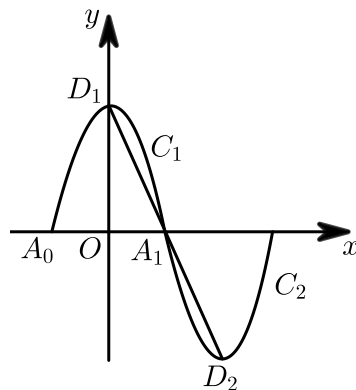
典题精练

19. 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 是常数, $a \neq 0$) 经过点 $A(1, 0)$ 和点 $B(0, -2)$, 且抛物线的对称轴在 y 轴的左侧. 下列结论: ① $abc < 0$; ② 方程 $ax^2 + (b-1)x + c = 0$ 有两个不等的实数根; ③ $-2 < a - b < 2$. 其中, 正确结论的个数是 ().
- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
20. 如图, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴相交于 A, B 两点, 点 A 在点 B 左侧, 顶点在折线 $M - P - N$ 上移动, 它们的坐标分别为 $M(-1, 4)$ 、 $P(3, 4)$ 、 $N(3, 1)$. 若在抛物线移动过程中, 点 A 横坐标的最小值为 -3 , 则 $a - b + c$ 的最小值是 ().



- A. -15 B. -12 C. -4 D. -2

21. 如图，一段抛物线 $y = -x^2 + 9$ ($-3 \leq x \leq 3$) 为 C_1 ，与 x 轴交于 A_0, A_1 两点，顶点为 D_1 ；将 C_1 绕点 A_1 旋转 180° 得到 C_2 ，顶点为 D_2 ； C_1 与 C_2 组成一个新的图象．垂直于 y 轴的直线 l 与新图象交于点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ ，与线段 D_1D_2 交于点 $P_3(x_3, y_3)$ ，且 x_1, x_2, x_3 均为正数，设 $t = x_1 + x_2 + x_3$ ，则 t 的最大值是 () ．



- A. 15 B. 18 C. 21 D. 24

经典再现

22. 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 为常数, $a \neq 0$) 经过点 $(-1, 0), (0, 3)$ ，其对称轴在 y 轴右侧，有下列结论：

- ① 抛物线经过点 $(1, 0)$ ；
② 方程 $ax^2 + bx + c = 2$ 有两个不相等的实数根；
③ $-3 < a + b < 3$.

其中，正确结论的个数为 () ．

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

23. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 是常数, $a \neq 0$) 的自变量 x 与函数值 y 的部分对应值如下表：

x	...	-2	-1	0	1	2	...
$y = ax^2 + bx + c$	...	t	m	-2	-2	n	...

且当 $x = -\frac{1}{2}$ 时，与其对应的函数值 $y > 0$ ，有下列结论：

- ① $abc > 0$ ；② -2 和 3 是关于 $ax^2 + bx + c = t$ 的两个根；③ $0 < m + n < \frac{20}{3}$.

其中，正确结论的个数是 () ．

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

三、恒过定点

24. 已知抛物线 $y = x^2 + 2mx - 3m$ (m 是常数), 且无论 m 取何值, 该抛物线都经过某定点 H , 则点 H 的坐标为 ().

- A. $\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$ B. $\left(-\frac{3}{2}, -1\right)$ C. $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$ D. $\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$

25. 已知抛物线 $y = ax^2 + (2 - a)x - 2$ ($a > 0$) 的图象与 x 轴交于 A 、 B 两点 (点 A 在点 B 的右侧), 与 y 轴交于点 C . 给出下列结论:

- ①在 $a > 0$ 的条件下, 无论 a 取何值, 点 A 是一个定点.
②在 $a > 0$ 的条件下, 无论 a 取何值, 抛物线的对称轴一定位于 y 轴的左侧.
③ y 的最小值不大于 -2 .
④若 $AB = AC$, 则 $a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

其中正确的结论有 () 个.

- A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

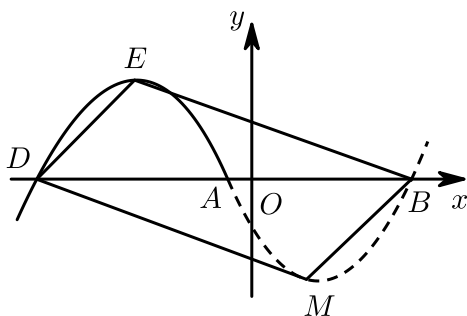
四、存在性问题

典题精练

26. 已知点 P 为抛物线 $y = x^2 + 2x - 3$ 在第一象限内的一个动点, 且 P 关于原点的对称点 P' 恰好也落在该抛物线上, 则点 P' 的坐标为().

- A. $(-1, -1)$ B. $(-2, -\sqrt{3})$ C. $(-\sqrt{2}, -2\sqrt{2} - 1)$ D. $(-\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$

27. 如图, 已知抛物线 $C_1: y = ax^2 + bx + c (a > 0)$ 与 x 轴交于点 A 、 B (点 A 在点 B 的左侧), M 为顶点, 将抛物线 C_1 绕点 A 旋转 180° , 得抛物线 C_2 , 点 B , M 旋转后的对称点为 D , E . 若四边形 $DMBE$ 为矩形, 则 $b^2 - 4ac$ 的值是().



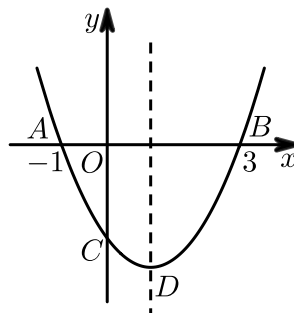
- A. 6 B. 9 C. 12 D. 18

28. 如图, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 交 x 轴于 $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$, 交 y 轴负半轴于点 C , 顶点为 D .

有下列结论:

- ① $2a + b = 0$;
- ② $2c < 3b$;
- ③ 当 $\triangle ABD$ 是等腰直角三角形时, 则 $a = \frac{1}{2}$;
- ④ 当 $\triangle ABC$ 是等腰三角形时, a 的值有3个.

其中, 正确结论的个数是().

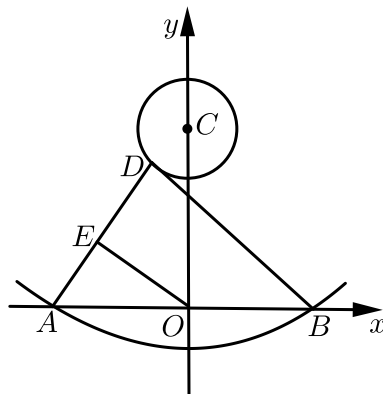


- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

五、二次函数与圆

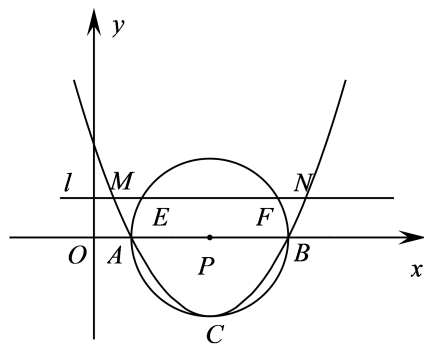
典题精练

29. 如图，抛物线 $y = \frac{1}{9}x^2 - 1$ 与 x 轴交于 A, B 两点， D 是以点 $C(0, 4)$ 为圆心，1 为半径的圆上的动点， E 是线段 AD 的中点，连接 OE, BD ，则线段 OE 的最小值是 () .



- A. 2 B. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{5}{2}$ D. 3

30. 如图，已知抛物线 $y = mx^2 - 6mx + 5m$ 与 x 轴交于 A, B 两点，以 AB 为直径的 $\odot P$ 经过该抛物线的顶点 C ，直线 $l \parallel x$ 轴，交该抛物线于 M, N 两点，交 $\odot P$ 于 E, F 两点，若 $EF = 2\sqrt{3}$ ，则 MN 的长为 () .



- A. $2\sqrt{6}$ B. $4\sqrt{2}$ C. 5 D. 6